

摘要：主要对光电吊舱俯仰环采用系统辨识法进行数学建模，基于幅值裕量和相位裕量法对分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器参数整定，采用 AL-Alaoui+CFE 脉冲响应不变法对控制器进行离散化实现，结合卡尔曼滤波器对模型进行仿真分析，结果表明基于卡尔曼滤波器的分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器比纯分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器具有更好的控制效果、更强的鲁棒性和抗干扰能力。

关键词：幅值裕量；相位裕量；分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器；卡尔曼滤波器；抗干扰能力

中图分类号：TP273 文献标识码：A 文章编号：1006-883X(2018)01-0026-05

收稿日期：2017-11-09

# 分数阶控制器在光电吊舱控制中的应用

王笑超 李明秋

长春理工大学 电子信息工程学院, 吉林长春 130022

## 一、引言

20世纪80年代，基于各种复杂系统研究基础上，分数阶微积分在控制领域的应用受到研究者关注<sup>[1]</sup>。目前工业控制系统中大多采用传统的PID控制器，分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  是传统PID的一般性，因其多了两个参数  $\lambda$ 、 $\mu$ ，其过程更细腻、更具有灵活性，分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器比整数阶PID控制器有更好的控制品质、动态特性和更强的鲁棒性<sup>[2]</sup>。

在实际控制系统中，常常会伴有强干扰和噪声的影响，1960年卡尔曼(Kalman)提出了卡尔曼滤波理论，把状态空间概念引入估计理论中，采用时域上的递推算法在数字计算机上进行数据滤波处理，卡尔曼滤波在控制领域得到广泛应用<sup>[3]</sup>。

本文首先运用MatLab软件中可视化系统辨识工具箱模块对光电吊舱俯仰环进行数学模型参数辨识，在不考虑扰动条件下对系统模型设计分数阶控制器进行仿真分析，通过改变系统增益大小分析对比得出，采用分数阶控制器控制，系统具有较强的增益鲁棒性。实际控制系统中常伴有扰动和噪声，单纯的分数阶控制器无法抑制扰动的影 响，在分数阶控制器基础上加入卡尔曼滤波器对噪声进行滤除，仿真结果显示，卡

尔曼滤波器与分数阶控制器结合对吊舱系统控制，可以有效滤除噪声，增强系统鲁棒性和抗干扰能力。因此，对分数阶控制器和卡尔曼滤波器的理论与应用研究有重要意义。

## 二、分数阶微积分及分数阶控制器

### 1、分数阶微积分理论

分数阶微积分主要研究任意阶次的微分、积分算子的特性及其应用。其一般分数阶表达式为：

$${}_0 D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) & \text{Re}(\alpha) > 0 \\ f(t) & \text{Re}(\alpha) = 0 \\ \int_0^{t_1} f(\tau)(d\tau)^{-\alpha} & \text{Re}(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中， ${}_0 D_t^\alpha$ —微分或积分操作算子；

$t_1$ —微积分的上限；

$t_0$ —微积分的下限；

$\alpha$ —实数或复数；

$\text{Re}(\alpha)$ —复数  $\alpha$  的实部。

对于分数阶微积分的定义，不同的数学家给出不同定义，在实际控制系统应用中，Caputo 分数阶微积

分定义更适合分数阶微积分初始值问题的求解<sup>[4]</sup>。

## 2、分数阶控制器

分数阶控制系统采用分数阶微分方程描述，对于单输入单输出的分数阶系统模型，可描述为：

$$\begin{aligned} & b_m D^{\beta_m} y(t) + \dots + b_1 D^{\beta_1} y(t) + b_0 D^{\beta_0} y(t) \\ & = a_n D^{\alpha_n} u(t) + \dots + a_1 D^{\alpha_1} u(t) + a_0 D^{\alpha_0} u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

其中， $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ 、 $\beta_j (j=1, 2, \dots, m)$  一任意实数；

$D^{\alpha_n} = {}_0 D_t^{\alpha_n}$ —Caputo 定义，表示具有  $\alpha_n$  阶次的从 0 到  $t$  的分数阶微分算子。

满足  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0 > 0$ ， $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0 > 0$ ，对上式进行拉普拉斯变换，可得到分数阶控制系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{m\lambda} + b_{m-1} s^{(m-1)\lambda} + \dots + b_0}{a_n s^{n\lambda} + a_{n-1} s^{(n-1)\lambda} + \dots + a_0} \quad (3)$$

不同的控制系统和不同的控制器，可以将其分为以下几类：

- (1) 整数阶控制器控制的整数阶控制系统；
- (2) 整数阶控制器控制的分数阶系统；
- (3) 分数阶控制器控制的整数阶系统；
- (4) 分数阶控制器控制的分数阶系统<sup>[5]</sup>。

对于分数阶控制器，微分方程式为：

$$u(t) = e(t)(K_p + K_d D_t^\mu + K_i D_t^\lambda) \quad (4)$$

其中， $K_p$ —比例系数；

$K_d$ —微分系数；

$K_i$ —积分系数；

$D_t^\mu$ —分数阶微分因子；

$D_t^\lambda$ —分数阶积分因子；

$\mu$ —微分阶数；

$\lambda$ —积分阶数。

经拉式变换得到对应时域传递函数表达式：

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s^\mu + K_i s^{-\lambda} \quad (5)$$

控制器对应的结构框图如图 1 所示。

## 三、卡尔曼滤波器和分数阶控制器实现

### 1、分数阶控制器实现

分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器设计是根据系统性能指标，得到满足系统要求的分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器优化  $K_p$ 、 $K_i$ 、

$K_d$ 、 $\lambda$ 、 $\mu$  参数的过程。控制器参数的选择对控制系统起关键性作用，采用幅值裕量和相位裕度法对分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器进行参数整定。对于给定的相位裕度  $\phi_m$  和截止频率  $\omega_c$ ，根据参数整定规则，利用 MatLab 优化工具箱中 `fmincon` 非线性优化函数方法，可以求得分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器  $K_p$ 、 $K_i$ 、 $K_d$ 、 $\lambda$ 、 $\mu$  参数值<sup>[6]</sup>。控制器表达式为：

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (6)$$

利用 AL-Alaoui+CFE 脉冲响应不变法对分数阶控制器进行离散化数字实现<sup>[7]</sup>。

### 2、卡尔曼滤波器实现

卡尔曼滤波理论以最小均方误差为估计的最佳准则，对于状态空间模型为：

$$\begin{cases} \hat{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \quad (7)$$

其中， $A$ —状态矩阵；

$B$ —输入矩阵；

$C$ —输出矩阵；

$D$ —前馈矩阵，一般为零。

离散化后状态空间模型为：

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \Phi \cdot X(k) + \Gamma \cdot w(k) \\ Y(k) &= H \cdot X(k) + v(k) \end{aligned} \quad (8)$$

其中， $\Phi$ —状态转移矩阵；

$\Gamma$ —噪声驱动；

$H$ —观测噪声；

$k$ —离散时间；

$X(k)$ —表示系统在  $k$  时刻的状态；

$Y(k)$ —对应状态的观测信号；

$w(k)$ —白噪声；

$v(k)$ —观测噪声。

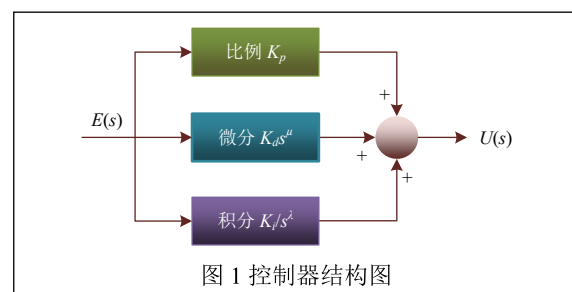
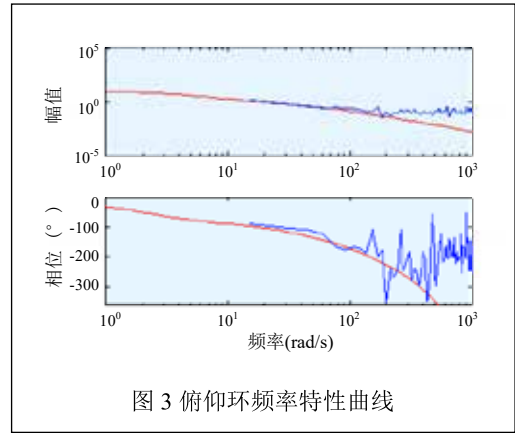
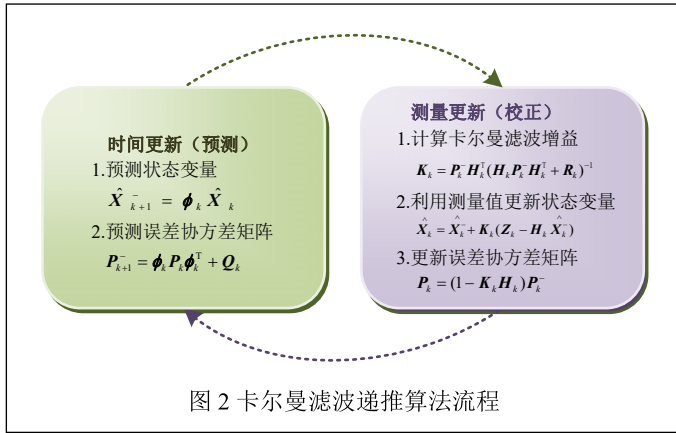


图 1 控制器结构图



卡尔曼滤波的递推算法流程图如图 2 所示<sup>[8]</sup>。在一个滤波周期内，由预测状态变量可知，根据  $k$  时刻的状态估计预测  $k+1$  时刻状态，预测误差协方差是对预测的质量优劣做定量描述，该预测描述了卡尔曼滤波时间更新过程，测量更新中各式是用来计算对时间更新值的修正量，该值由  $P_{k+1}$  等信息所确定，最终结果可以合理利用观测信号  $Y(k)$ 。只要给定初值  $\hat{X}_0$  和  $P_0$ ，根据  $k$  时刻的测量  $Z_k$ ，就可以计算得到  $k$  时刻的状态估计  $\hat{X}_k$ 。

#### 四、算法仿真分析

##### 1、光电吊舱俯仰环模型建立

光电吊舱是包含线性和非线性因素的负载系统，难以通过物理建模法得到准确的系统模型，因此采用系统辨识的方法建立数学模型，通过实测输入输出数据对模型进行参数辨识。将某光电吊舱航向扫频信号作为系统输入，求得吊舱俯仰环在不同频率段的响应特性，最后通过系统辨识法求取系统的频率特性<sup>[9]</sup>。

通过可视化系统辨识工具箱对系统进行参数辨识<sup>[10]</sup>，最后取部分实验数据对辨识模型进行验证，拟合得到俯仰环频率特性曲线如图 3 所示，不考虑延迟环节，近似得俯仰环的传递函数如下：

$$P(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (9)$$

其中， $K=1.449$ 、 $T_1=0.11$ 、 $T_2=0.0091$ 。

##### 2、仿真分析

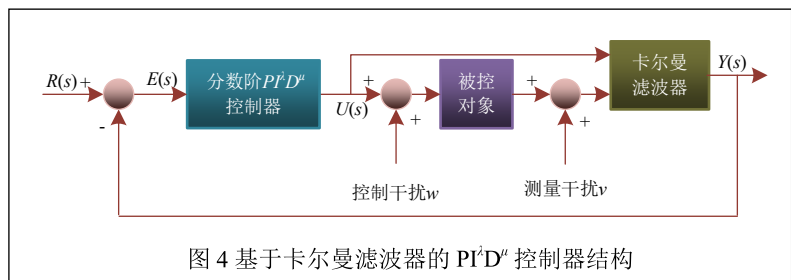
基于卡尔曼滤波器的分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器结构框图如图 4 所示。其中，被控对象采用零阶保持器进行离散化，分数阶控制器根据前文研究方法进行离散化实现，在系统运行和测量过程中产生的扰动经过滤波器滤除后的值  $Y(s)$  反馈到输入端与预定值进行比较后得  $E(s)$ ，作为控制器的输入值， $U(s)$  为控制器的输出， $w$  为控制干扰（过程噪声）， $v$  为测量噪声。

采用分数阶控制器与卡尔曼滤波器结合控制，假设系统开环截止频率  $\omega_c=90\text{rad/s}$ ，相位裕度  $\phi_m=60^\circ$ ，采样时间  $t_s=0.001\text{s}$ ，系统过程噪声和测量噪声均为协方差 1，幅值 0.02 的白噪声，即  $Q=1$ ， $R=1$ ，初始值  $P_0=B*Q*B^T$ 。

由已知条件，根据参数整定规则，得分数阶控制器各参数为  $K_p=7.7212$ 、 $K_I=35.6517$ 、 $K_d=1.5847$ 、 $\lambda=0.7404$ 、 $\mu=0.2558$ ，传递函数表达式为：

$$C(s) = 7.7212 + \frac{35.6517}{s^{0.7404}} + 1.5847s^{0.2558} \quad (10)$$

加入噪声前改变系统增益大小， $K_p$  分别取原值的 0.8 倍、1.0 倍、1.2 倍，输入阶跃信号，仿真结果如图



5 所示。根据仿真结果可以得出系统动态响应特性，如表 1 所示。

根据结果分析可以得出，改变系统增益大小，系统动态响应特性变化较小，证明系统具有较强的增益鲁棒性，参数摄动不敏感，系统对控制输入信号具有良好的跟踪能力<sup>[1]</sup>。

加入滤波后，系统状态描述如下

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -(T_1 + T_2) & T_1 T_2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0]$$

$$D_1 = 0$$

将连续时不变系统转换为线性离散时不变系统：

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0010 & 0.0000 \\ -0.0000 & 1.0000 & 0.0010 \\ -0.0010 & -0.0001 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0014 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0]$$

$$D = 0$$

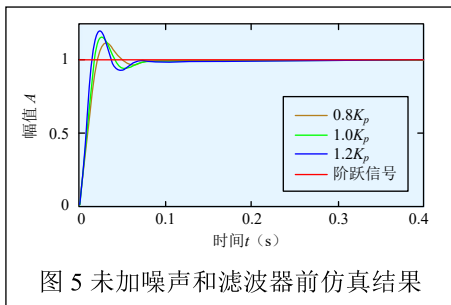


图 5 未加噪声和滤波器前仿真结果

表 1 系统动态响应特性

	上升时间 $t_r$ (s)	调节时间 $t_s$ (s)	超调量 $\sigma\%$ (%)
$0.8K_p$	0.0214	0.134	10.8
$1.0K_p$	0.0185	0.107	15.5
$1.2K_p$	0.0155	0.295	19.8

初始误差协方差  $P_0$  为：

$$P_0 = 1.0e-05 \times \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.2100 \end{bmatrix}$$

实验噪声大小情况如图 6 所示。加入滤波器后仿真结果如图 7 所示。由图 7 可以得出，系统在加入噪声和扰动后，未加入滤波器的动态响应特性，上升时间  $t_r=0.0175s$ ，系统加入干扰后，产生随机抖动，无法达到稳定状态，系统超调量  $\sigma\%=22.5\%$ ；加入滤波器后的动态响应特性，上升时间  $t_r=0.0175s$  调节时间  $t_s=0.177s$ ，系统超调量  $\sigma\%=22.2\%$ ，系统在经过 0.177s 后达到稳定状态，响应速度较快。

实际系统中，噪声影响比实验中要复杂的多，卡尔曼滤波器在实际应用效果中有一定偏差，但整体满足到控制性能的要求。

## 五、结束语

本文主要以光电吊舱俯仰环为被控对象进行系统建模，通过改变系统增益大小，加入噪声干扰等条件，采用基于卡尔曼滤波器的分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制方法与纯分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制方法进行仿真对比研究，结果显示系统未加入噪声和滤波器前，纯分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器具有较强的增益鲁棒性，加入噪声和滤波器后，单纯的分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器无法满足

系统要求。基于卡尔曼滤波器的分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器控制效果有明显改善，满足系统需求。

## 参考文献

- [1] CA Monje, YQ Chen, BM Vinagre, et al. Fractional-order Systems and Controls-Fundamentals and Applications[M]. Springer, 2010.
- [2] 吴振宇, 赵亮, 冯林. 基于分数阶 PID 控制器的智能车控制[J]. 控制工程, 2011, 18(3): 401-404.

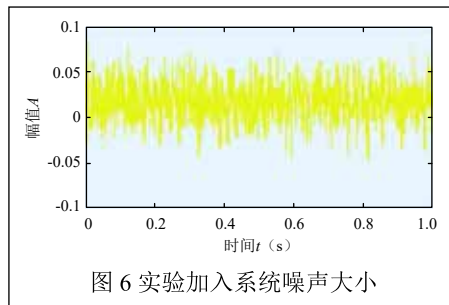


图 6 实验加入系统噪声大小

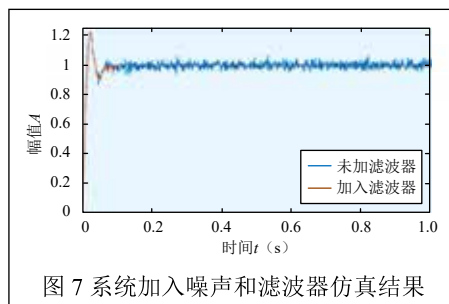


图 7 系统加入噪声和滤波器仿真结果

- [3] 黄小平, 王岩. 卡尔曼滤波原理及应用 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2015.
- [4] 王春阳, 李明秋, 姜淑华, 等. 分数阶控制系统设计 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2014.
- [5] 赵春娜, 赵雨, 张祥德, 等. 分数阶控制器与整数阶控制器仿真研究 [J]. 系统仿真学报, 2009, 21(3): 768-771.
- [6] 王春阳. 分数阶  $PI-\lambda D-\mu$  控制器参数整定方法与设计研究 [D]. 长春: 吉林大学, 2013.
- [7] Yang Q C, Moore K L. Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I Fundamental Theory & Applications, 2002, 49(3): 363-367.
- [8] 秦永元. 卡尔曼滤波与组合导航原理 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.
- [9] 白涛. 由频率特性数据到传递函数的识辨研究 [D]. 长春: 吉林大学, 2007.
- [10] 魏巍. MATLAB 控制工程工具箱技术手册 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2004.
- [11] 薛定宇. 控制系统计算机辅助设计: MATLAB 语言及应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.

## Application of fractional controller in photoelectric pod control

WANG Xiao-chao, LI Ming-qiu

(School of Electronics and Information Engineering, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

**Abstract:** The mathematical model of optical pod pitch is established by using the system identification method. The controller parameters of fractional order  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  are tuned based on the amplitude margin and phase margin method, and the AL-Alaoui+CFE impulse response invariant method is used to discretize the controller. Finally, the model is simulated and analyzed with Kalman filter, and the results show that the fractional order  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controller based on the Kalman filter has better control effect, stronger robustness and anti-interference ability than pure fractional order  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controller.

**Key words:** amplitude margin; phase margin; fractional order controller; Kalman filter; anti-interference ability

## 作者简介

王笑超: 长春理工大学电子信息工程学院, 硕士, 研究方向为智能信息系统与仿真。

通讯地址: 吉林省长春市朝阳区卫星路 7186 号长春理工大学南校区

邮编: 130022 邮箱: 302930462@qq.com

李明秋: 长春理工大学电子信息工程学院, 博士, 教授, 主要从事自动化技术的教学和科研工作。